ច្បាប់អុីពែរធរណីមាត្រ

(Hypergeometric distribution)

សន្មតិថានៅក្នុង Population មួយដែលមាន N ធាតុមាន a ធាតុដែលត្រូវកំណត់ថាជាជោគជ័យ (sucess) និង b ធាតុ បរាជ័យ (failure) ហើយដែល N=a+b ។ គេធ្វើការជ្រើសរើសនូវគំរូស្ថិតិ (sample) ដែលមាន n ធាតុ (n តូចជាងឬស្មើ N) ពីក្នុង population នេះ ។ កំណត់តំលៃ ប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយមាន x ជោគជ័យនៅក្នុងគំរូស្ថិតិនេះ ? តំលៃប្រូបាប៊ីលីតេនេះត្រូវបានកំណត់ដោយច្បាប់អុីពែរធរណីមាត្រដែលកំណត់ដូចខាងក្រោម :

$$P(X=x)=\frac{C_a^x * C_b^{n-x}}{C_N^n}$$

ដែល $x=\begin{cases}0,1,2,\ldots\ldots,n; n\leq a\\ 0,1,2,\ldots\ldots,a; n>a\end{cases}$

A=N*p និង b=N(1-p)

ដែល p ជាផលធៀបនៃ ជោគជ័យក្នុង population នេះ ។

<u>**ចំណាំ:**</u>

បើ X ជាអថេរចៃដន្យអុីពែរធរណីមាត្រ (hypergeometric random variable) នោះ :

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1-p) * \frac{N-n}{N-1}$$

ឧទាហរណ៍១:

អ្នកទទួលខុសត្រូវនៃមន្ទីរពិសោធន៍មួយកន្លែងមានបុគ្គលិក 18 នាក់ដែលក្នុងនោះមានមនុស្សស្រី 10 នាក់ និងមនុស្សប្រុស 8 នាក់ ។ គាត់ត្រូវជ្រើសរើសបុគ្គលិករបស់គាត់ចំនួនពីរនាក់ដើម្បីចូលរួមក្នុង គណៈកម្មការការពារសន្តិសុខក្នុងមន្ទីរពិសោធន៍នេះ ។ ការជ្រើសរើសត្រូវធ្វើឡើងដោយចៃដន្យ ។

១- តើគេអាចជ្រើសរើសមនុស្សពីរនាក់នេះបានប៉ុន្មានរបៀប ព្រមទាំងកំណត់ប្រូបាប៊ីលីតេនៃការជ្រើសរើសនេះ?

២- សន្មតិថា X ជាចំនួនមនុស្សស្រីដែលគេជ្រើសរើសក្នុងគំរូស្ថិតិនេះ តើ X អាចទទួលតំលៃណាខ្លះ ហើយកំណត់របាយប្រូបាប៊ីលីតេនៃ X ?

៣- កំណត់ប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយមនុស្សពីរនាក់ដែលត្រូវបានជ្រើសរើសជាមនុស្សស្រី ?

ចំលើយ: ១- n=153 របៀប ; ២- x : 0,1,2 និង $P(X = x) = \frac{C_{10}^{x} * C_{8}^{2-x}}{C_{18}^{2}}$

៣- p=0.2941

S-plus:

dhyper : density of hypergeometric distribution

dhyper(x,a,b,n)

អនុវត្តលើឧទាហរណ៍ខាងលើ :

```
function()
{
 #Question 1
     n <- choose(18, 2)
     proba1 <- 1/n
 # Question 2
     x <- 0:2
     proba2 <- dhyper(x, 10, 8, 2)
     Table <- rbind(x, proba2)
 #Question 3
     proba3 <- dhyper(2, 10, 8, 2)
     return(n, proba1, Table, proba3)
  }
```

solution:

$n:

```
[1] 153

$proba1:
[1] 0.006535948

$Table:
  x       0.0000000  1.0000000  2.0000000
 proba2   0.1830065  0.5228758  0.2941176

$proba3:
[1] 0.2941176
```

<u>ឧទាហរណ៏២:</u>

អ្នកលក់ទំនិញនៃហាងមួយកន្លែងបានបញ្ជាក់ថា 10% នៃ printer ដែលគាត់ទទួលយកមកលក់ត្រូវបានជួសជុលមុននឹងលក់អោយអតិថិជនរបស់គាត់ ។ បើសិនណាគេជ្រើសរើសដោយចៃដន្យនូវ printer ចំនួន 5 ពីក្នុងចំណោម printer ចំនួន 20 គ្រឿង កំណត់ប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយគ្មាន printer ដែលខូចទាល់តែសោះ ?

ច្បាប់ព័រសុង

(The Poisson distribution)

ច្បាប់ព័រសុងត្រូវបានគេអនុវត្តយ៉ាងញឹកញាប់នៅក្នុងបណ្តាក្រុមហ៊ុនសហគ្រាសនានាដូចជា : នៅក្នុងការគ្រប់គ្រងក្នុងរោងចក្រឧស្សាហកម្ម (ចំនួនអ្នករងគ្រោះថ្នាក់នៅក្នុងពេលបំពេញការងារ, ការផ្ទៀងផ្ទាត់នូវបញ្ជីគណនេយ្យ ។ល។), operation research (ការសិក្សាអំពីការបញ្ជូនពតិមានដែលមានលក្ខណៈបន្តបន្ទាប់គ្នា), ការធ្វើចរាចរនៅលើផ្លូវសាធារណៈ (ចំនួនយានយន្តដែលត្រូវកកស្ទះនៅចំនុចណាមួយ), demographic (ការផ្តល់កំណើតដែលធ្វើអោយមានការកើនឡើងនៃប្រជាជន , ការស្លាប់នៅក្នុង

population មួយដែលគេសិក្សា) , ការស្រាវជ្រាវអំពីវេជ្ជសាស្ត្រ (ការសិក្សាទៅលើកំណរកំណើតនៃបាទេរី) ,………. ។

នៅក្រោមលក្ខខ័ណ្ឌខ្លះច្បាប់ព័រសុងមានកំហិតទៅរកច្បាប់ទ្វេធា ។

<u>ច្បាប់ព័រសុង:</u>

អថេរចៃដន្យ X ដែលអាចទទួលតំលៃ 0,1,2,3,….,n,…. ហើយដែលមានប្រូបាប៊ីលីតេ $P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}*\lambda^{x}}{x!},\lambda>0$ គោរពទៅតាមច្បាប់ព័រសុង $P(X=x\backslash\lambda)$ ដែលមានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ λ ។

<u>សង្ឃឹមគណិត វ៉ារ្យង់ និង គំលាតគំរូ</u> (Expectation, variance and Standard deviation)

បើ X ជាអថេរចៃដន្យព័រសុង នោះ :

$$E(X)=\lambda$$
$$V(X)=\lambda$$
$$\sigma(X)=\sqrt{\lambda}$$

<u>ចំណាំ:</u>

X គោរពតាមច្បាប់ព័រសុងអាចសរសេរ :

$$X\sim P(X=x\backslash\lambda)$$
$$X\sim P(x;\lambda)$$
$$X\sim P(\lambda)$$
$$X\sim P(x,n,p)$$

<u>ឧទាហរណ៍:</u>

អ្នកទទួលខុសត្រូវនៃគណៈកម្មការសន្តិសុខសហគ្រាស NICOM បានសិក្សាទៅលើចំនួនគ្រោះថ្នាក់ការងារដែលបានកើតឡើងក្នុងរយៈពេល 2 ឆ្នាំកន្លងទៅ ។ តាមរបាយការណ៏នៃការសិក្សានេះបានអោយដឹងថាចំនួនមធ្យមនៃគ្រោះថ្នាក់ការងារមាន 1.6 ក្នុង 1 ថ្ងៃ ។

ក- ដោយសន្មតិថាចំនួនគ្រោះថ្នាក់នៅក្នុងមួយថ្ងៃគោរពទៅតាមច្បាប់ព័រសុង កំណត់រូបមន្តមួយដែលអាចអោយយើងគណនានូវប្រូបាប៊ីលីតេនៃ x គ្រោះថ្នាក់ការងារក្នុងមួយថ្ងៃ ?

$$E(X)=\lambda=1.6\Rightarrow P(X=x\backslash\lambda=1.6)=\frac{e^{-1.6}*(1.6)^{x}}{x!},x=0,1,2,......$$

ខ- គំលាតគំរូនៃ x :

$\sigma(X) = \sqrt{1.6} = 1.2625$ គ្រោះថ្នាក់ការងារ/1ថ្ងៃ

គ- ប្រូបាប៊ីលីតេនៃការមានគ្រោះថ្នាក់ការងារលើសពី 2 ដងក្នុងមួយថ្ងៃ

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \le 2) \\ &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] \\ &= 1 - \left[\frac{e^{-1.6}(1.6)^0}{0!} + \frac{e^{-1.6}(1.6)^1}{1!} + \frac{e^{-1.6}(1.6)^2}{2!} \right] \\ &= 0.2167 = 21.67\% \end{aligned}$$

ឃ- គណនាប្រូបាប៊ីលីតេនៃចំនួនគ្រោះថ្នាក់ការងារនៅក្នុងចន្លោះ $[E(X)-\sigma(X), E(X)+\sigma(X)]$

$$E(X) - \sigma(X) = 1.6 - 1.265 = 0.335$$

$$E(X) + \sigma(X) = 1.6 + 1.265 = 2.865$$

$$P(E(X) - \sigma(X) \le X \le E(X) + \sigma(X)) = P(0.335 \le X \le 2.865)$$

ដោយអថេរចៃដន្យព័រសុងជាអថេរចៃដន្យដាច់ដែលអាចទទួលតំលៃ 0,1,2,3,…..,n,… ដូច្នេះ :

$$\begin{aligned} P(0.335 \le X \le 2.865) &= P(0 \le X \le 2) \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= 0.7833 \end{aligned}$$

S-plus:

dpois : density of poisson distribution

dpois(x, λ)

ដោយអនុវត្ត S-plus លើឧទាហរណ៏ខាងលើ យើងអាចសរសេរ program ដូចខាងក្រោម :

```
  function()
{
#Question 1
        lambda <- 1.6
        print(" Poisson(x,lambda)=(exp(-lambda)*lambda^x)/factorial(x) ; lambda=1.6 ;
                x=0,1,2,.....")
#Question 2
        sigma <- sqrt(lambda)
#Question 3
        x <- 0:2
        proba3 <- 1 - sum((exp( - lambda) * lambda^x)/factorial(x))
#Question 4
        born.inf <- as.integer(lambda - sigma)
        born.sup <- as.integer(lambda + sigma)
        x <- born.inf:born.sup
        proba4 <- sum((exp( - lambda) * lambda^x)/factorial(x))
```

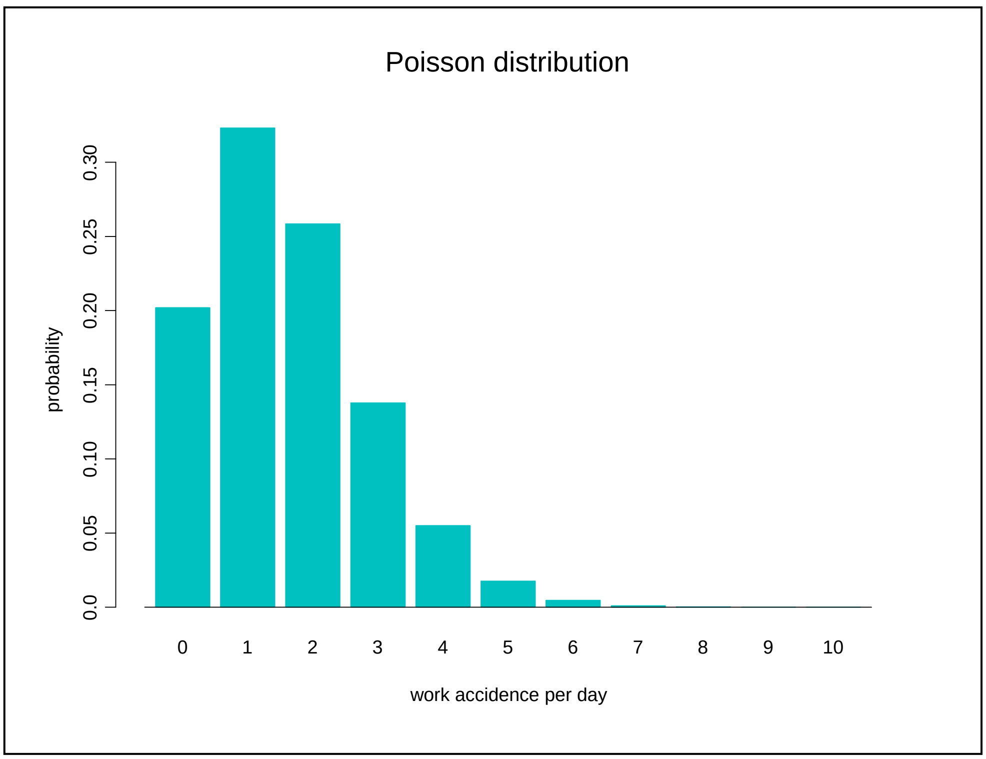
```
#Question 5
        x<-0:10
        proba5<-(exp(-lambda)*lambda^x)/factorial(x)
        barplot(proba5,names=factor(levels(x)),xlab=”work accidence per day”,ylab=
                “probability”,main=”Poisson distribution”)
        return(sigma, proba3, proba4)
}
```

output

```
 [1] " Poisson(x,lambda)=(exp(-lambda)*lambda^x)/factorial(x) ; lambda=1.6 ;
x=0,1,2,....."
$sigma:
[1] 1.264911

$proba3:
[1] 0.2166415


$proba4:
[1] 0.7833585
```



<u>ឧទាហរណ៍ :</u> ការអនុវត្តច្បាប់ Poisson ទៅលើការលក់ប្រចាំថ្ងៃនៃក្រុមហ៊ុន Computer ។ ការលក់ប្រចាំថ្ងៃ X_1 នៃក្រុមហ៊ុន computer មួយកន្លែងគោរពតាមច្បាប់ Poisson ដែលមានតំលៃ មធ្យម $\lambda_1=4.2$ គ្រឿង ។

ក- កំណត់ វ៉ារ្យង់នៃអថេរ X_1 ?

ដោយការលក់ប្រចាំថ្ងៃ X_1 គោរពតាមច្បាប់ Poisson ដូច្នេះ :

$$E(X_1)=Var(X_1)=4.2\ (\text{គ្រឿង})^2$$

ខ- កំណត់សមមាត្រធៀប (proportion) នៃថ្ងៃដែលលក់បាន :

១-មួយគ្រឿង :

$$P(X=1,\lambda=4.2)=\frac{4.2^1 * e^{-4.2}}{1!}=0.0630$$

២-ពី 4 ទៅ 5 គ្រឿង :

$$P(4\le X\le 6)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=0.1944+0.1633+0.1143$$

=0.472

គ- នៅក្នុងរយៈពេល 250 ថ្ងៃដែលបើកលក់តើមានប្រហែលប៉ុន្មានថ្ងៃដែលការលក់ប្រចាំថ្ងៃដាច់បាន 3 គ្រឿង ?

$$\lambda\approx n*p=250*P(X=3)=250*0.1852\approx 46 \text{ ថ្ងៃ}$$

ចំណាំ:

១-បើ X_1 និង X_2 ជាអថេរចៃដន្យព័រសុងដែលមិនអាស្រ័យនឹងគ្នា ហើយដែលមានប្រូបាប៊ីលីតេរៀង $P(X_1,\lambda_1)$ និង $P(X_2,\lambda_2)$ នោះ :

$$Y=X_1+X_2\sim P(Y,\lambda_1+\lambda_2)$$

៤- ជាទូទៅបើ $X_1,X_2,\dots,X_n$ ជាអថេរព័រសុងមិនអាស្រ័យនឹងគ្នាហើយដែលមានប្រូបាប៊ីលីតេរៀង $P(X_1,\lambda_1),P(X_2,\lambda_2),\dots\dots\dots,P(X_n,\lambda_n)$ នោះ :

$$Y=X_1+X_2+\dots\dots+X_n\sim P(Y,\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\dots.+\lambda_n)$$

កំហិតនៃច្បាប់ ទ្វេធាទៅរកច្បាប់ព័រសុង :

សន្មតិថាលក្ខខ័ណ្ឌ នៃការអនុវត្តទៅលើច្បាប់ ទ្វេធាត្រូវបានបំពេញ ប៉ុន្តែនៅក្នុងករណីនេះទំហំ sample នៃការសាកល្បង n មានទំហំធំហើយប្រូបាប៊ីលីតេ ផ មានតំលៃតូចដែលធ្វើអោយ np មានតំលៃមួយតូចធៀបទៅនឹងតំលៃ ន ដូច្នេះយើងអាចធ្វើកំហិតពីច្បាប់ ទ្វេធាទៅច្បាប់ព័រសុងដូចខាងក្រោម :

$$b(x;n;p)\approx p(x;\lambda),\lambda=np$$

នៅក្នុងការអនុវត្តកំហិតពីច្បាប់ទ្វេធា ទៅរកច្បាប់ព័រសុងអាចអនុវត្តបានលុះត្រា :

$n > 20, p \leq 0.10$ និង $np \leq 5$

$$\boxed{\lim_{\substack{n \to +\infty \\ p \to 0}} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{(np)^x e^{-np}}{x!} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}}$$

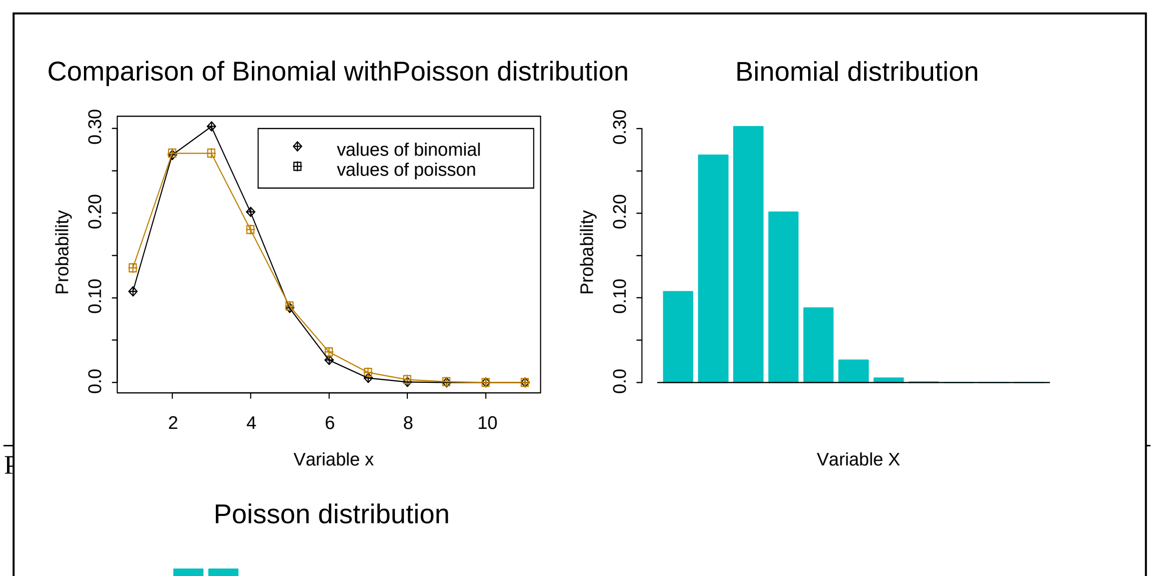
យើងនឹងលើកយកឧទាហរណ៍មួយដើម្បីបញ្ជាក់អំពីកណើខាងលើ ដោយប្រើ Programming S-plus ដូចខាងក្រោម :

```
 function(n, p)
{
        kam2 <- function(n, p)
        {
                x <- 0:10
                binomial <- dbinom(x, n, p)
                lambda <- n * p
                poisson <- dpois(x, lambda)
                table <- cbind(x, binomial, poisson)
                par(mfrow = c(2, 2))
                y1 <- plot(binomial, pch = 9, xlab =
                        "Variable x", ylab =
                        "Probability", main =
                        "Comparison of Binomial with Poisson distribution"
                        )
                y2 <- points(poisson, col = 5, pch = 12
                        )
                lines(binomial)
                lines(poisson, col = 5)
                legend(4.2, 0.3, c("values of binomial",
                        "values of poisson"), mark = c(
                        9, 12))
                barplot(binomial, xlab = "Variable X",
                        ylab = "Probability", main =
                        "Binomial distribution")
                barplot(poisson, xlab = "Variable X",
                        ylab = "Probability", main =
                        "Poisson distribution")
```

```
                return(table, y1, y2)
        }
        result.1 <- kam2(10, 0.2)
        result.2 <- kam2(20, 0.1)
        result.3 <- kam2(30, 0.05)
        return(result.1, result.2, result.3)
}
```

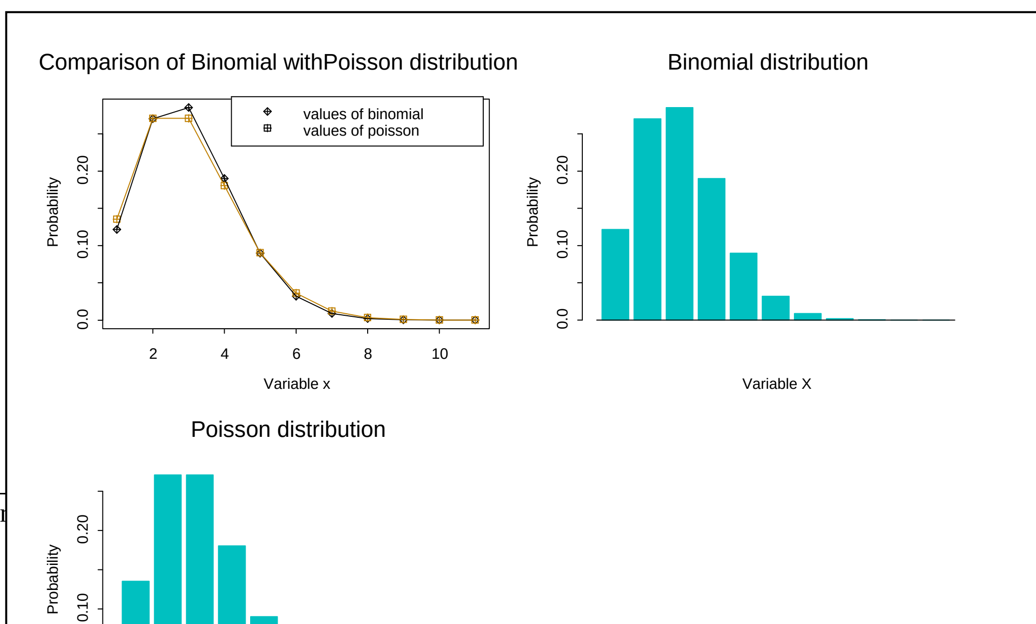
ក- **ករណីដែល n=10, p=0.20, b(x,10,0.20)** :

x	binomial	poisson
0	0.1073741824	0.13533528324
1	0.2684354560	0.27067056647
2	0.3019898880	0.27067056647
3	0.2013265920	0.18044704432
4	0.0880803840	0.09022352216
5	0.0264241152	0.03608940886
6	0.0055050240	0.01202980295
7	0.0007864320	0.00343708656
8	0.0000737280	0.00085927164
9	0.0000040960	0.00019094925
10	0.0000001024	0.00003818985



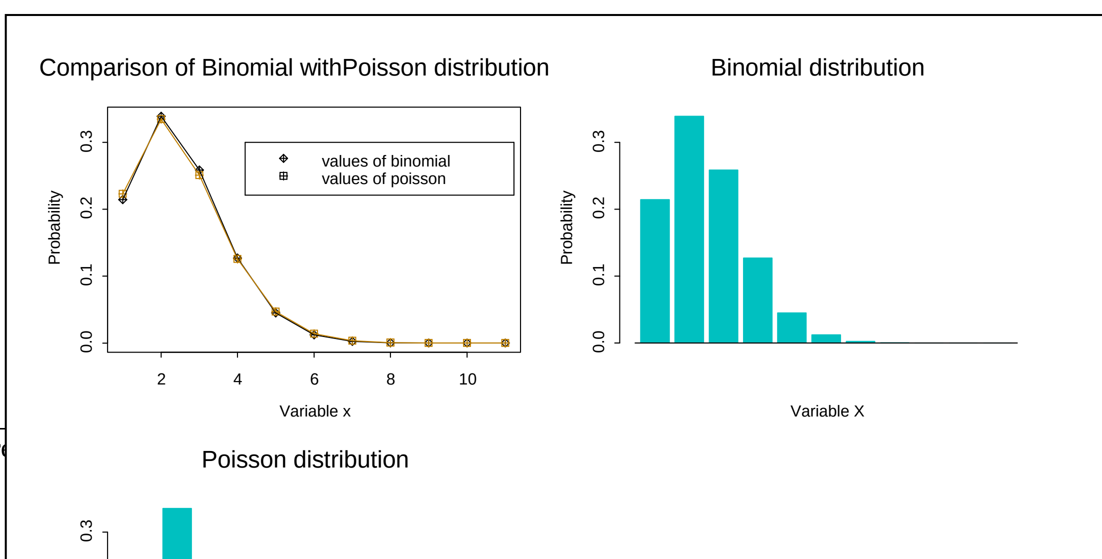
ខ- ករណីដែល n=20, p=0.10, b(x,20,0.10)

x	binomial	poisson
0	1.215767e-001	0.13533528324
1	2.701703e-001	0.27067056647
2	2.851798e-001	0.27067056647
3	1.901199e-001	0.18044704432
4	8.977883e-002	0.09022352216
5	3.192136e-002	0.03608940886
6	8.867045e-003	0.01202980295
7	1.970454e-003	0.00343708656
8	3.557765e-004	0.00085927164
9	5.270763e-005	0.00019094925
10	6.442043e-006	0.00003818985



គ-ករណី ដែល n=30,p=0.05, b(x,30,0.05) :

x	binomial	poisson
0	2.146388e-001	2.231302e-001
1	3.389033e-001	3.346952e-001
2	2.586367e-001	2.510214e-001
3	1.270496e-001	1.255107e-001
4	4.513605e-002	4.706652e-002
5	1.235302e-002	1.411996e-002
6	2.708997e-003	3.529989e-003
7	4.888415e-004	7.564262e-004
8	7.396944e-005	1.418299e-004
9	9.516536e-006	2.363832e-005
10	1.051828e-006	3.545748e-006



<u>លំហាត់:</u>

១- ដោយប្រើកម្មវិធី S-plus ចូរបង្ហាញនិងពន្យល់ពីតួនាទីនិមួយ ៗ នៃ command ខាងក្រោម :

ក- dbinom(x,30,0.10) , x<- 0:12

ខ- Plot(data)

គ- par(mfrow=c(3,2))

ឃ- តើ points ខុស ពី plot យ៉ាងដូចម្តេច ?

ង- return()

ច- par(mfg=c(1,2,1,2))

២- ដោយប្រើកម្មវិធី S-plus ចូរសង់ program ដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហាខាងក្រោម :

និស្សិតម្នាក់ត្រូវឆ្លងកាត់ការប្រលងមួយដែលមាន 15 សំនួរ ។ វិធីសាស្ត្រនៃការឆ្លើយសំនួរ គឺ ពិតឬ មិនពិត ។ ដោយសារនិស្សិតនេះពុំបានរៀបចំមេរៀនបានល្អ គាត់សំរេចចិត្តបោះកាក់ក្នុងការឆ្លើយ បើកាក់ចេញផ្នែកខាងរូប គាត់ឆ្លើយ "ពិត" បើកាក់ចេញផ្នែកខាងលេខ គាត់ឆ្លើយ " មិនពិត" ។ និស្សិតនេះប្រលងជាប់ លុះត្រាតែគាត់ទទួលបានពិន្ទុ 60% ។ កំណត់ប្រូបាប៊ីលីតេ ដើម្បីអោយនិស្សិតរូបនេះប្រលងបានពិន្ទុ យ៉ាងតិចណាស់ជាប់ ។

៣- ក្រុមហ៊ុនសាងសង់មួយបានបញ្ជាក់ថាដើម្បីសាងសង់អាគារមួយដែលមាន 10 ល្វែង កំពស់ 4 ជាន់ ព្រងទាំងមានក្បាច់រចនាល្អប្រណិតត្រូវចំណាយពេលជាមធ្យម 50 សប្តាហ៍ និងគំលាតគំរូ (standard deviation) 5 សប្តាហ៍ ។ ឥឡូវនេះក្រុមហ៊ុននេះមានបំនងចង់ដេញថ្លៃលើគំរោងសាងសង់មួយដែលមានលក្ខណៈដូចខាងលើ

ដោយបញ្ចាក់ពីពេល វេលាច្បាស់លាស់ក្នុងការសាងសង់នៅក្នុងកិច្ចសន្យាហើយដែលមានប្រូបាប៊ីលីតេនៃការគោរព កិច្ចសន្យាស្មើ 90% ។

តើក្រុមហ៊ុននេះត្រូវបញ្ចាក់ក្នុងកិច្ចសន្យាចំនួនប៉ុន្មានសប្តាហ៍ដើម្បីសំរេច ការសាងសង់នេះ បើសិនណាគេសន្មតិថា ពេលវេលាចាំបាច់ក្នុងការសាងសង់គោរពតាមច្បាប់ណរ័មាល់ (normal) ។

៤- គេមានតារាងទិន្នន័យដូចខាងក្រោម :

Output($)	Probability
27000	0.11
23000	0.14
20000	0.24
22000	0.21
16000	0.30

ដោយប្រើ កម្មវិធី S-plus ចូរបង្កើត table នៃទិន្នន័យខាងលើនេះ និងគណនាមធ្យមនៃ output ដែលនឹង អាចទទួលបានព្រមទាំងគំលាតគំរូ (standard deviation) និង risk ។

៥- ដោយប្រើកម្មវិធី S-plus ចូរសង់ program ដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហាខាងក្រោម :

តាមការអង្កេតមួយដែលបានធ្វើឡើងដោយទស្សនាវដ្តី "Gestion" បានអោយដឹងថា 28% នៃបុគ្គលិក របស់ ក្រុមហ៊ុន " AT&T " មានសញ្ញាប័ត្រ "Master in management" ។ សន្មតិថា បុគ្គលិក 15នាក់ ត្រូវ បានជ្រើសរើសដោយចៃដន្យ ។

ក- តើជាមធ្យមមានបុគ្គលិកប៉ុន្មាននាក់ ដែល មានសញ្ញាប័ត្រ "Master in management" ក្នុង ចំណោម គំរូស្ថិតិខាងលើ ។

ខ- ប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយ បុគ្គលិក 5 នាក់ មានសញ្ញាប័ត្រ "Master in management" ក្នុង ចំណោម គំរូស្ថិតិខាងលើ ។

៦- បុរសម្នាក់មានបំណងចង់វិនិយោគថវិការមួយចំនួនដោយការទិញប័ណ្ណ ភាគហ៊ុន ។ គាត់សង្កេតឃើញថា ក្រុមហ៊ុន A អាចផ្តល់ទិន្នផល 16% បើគ្មានការធ្លាក់ចុះនៃសេដ្ឋកិច្ច ផ្ទុយទៅវិញគាត់អាចទទួលបាន10%បើមានការធ្លាក់ ចុះនៃសេដ្ឋកិច្ច ។ គាត់សង្កេតឃើញផងដែរក្រុមហ៊ុន B ផ្តល់ទិន្នផលថេរ 12% ។ តើការធ្លាក់ចុះនៃសេដ្ឋកិច្ច ត្រូវតូចជាងប៉ុន្មានភាគរយ ដើម្បីអោយការទិញប័ណ្ណ ភាគហ៊ុននៃ ក្រុមហ៊ុន A ទទួលបានទិន្នផលខ្ពស់ជាង ក្រុមហ៊ុន B ?