ទ្រឹស្តីបទមួយចំនួននៃប្រូបាប៊ីលីតេ

ទ្រឹស្តីបទ I :

បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ចៃដន្យពីរ នោះ :

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

សំរាយបំភ្លឺ:

A+B កើតមានឡើងនៅពេលណាដែលមានការកើតឡើងនៃព្រឹត្តិការណ៍ណាមួយក្នុងចំណោម ព្រឹត្តិការណ៍ទាំង :

$$A\overline{B}, \overline{A}B, AB$$

ដូច្នេះ : $P(A+B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(AB)$ (1)

$$P(A) = P(A\overline{B}) + P(AB) \Rightarrow P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB), (2)$$

$$P(B) = P(\overline{A}B) + P(AB) \Rightarrow P(\overline{A}B) = P(B) + P(AB), (3)$$

ជំនួស (2) និង (3) ក្នុង(1) យើងបាន :

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

លក្ខណៈសំគាល់មួយចំនួន :

- បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា (independent events)

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) * P(B)$$

- បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ទាក់ទងគ្នា (dependent events)

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B \setminus A)$$

- បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុងគ្នា (disjoint)

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \quad \text{ព្រោះ} \quad P(AB) = 0$$

ទ្រឹះស្តីបទ II :

ប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៏ A ដែលកើតឡើងក្រោមលក្ខខ័ណ្ឌនៃការកើតឡើងព្រឹត្តិការណ៏ណាមួយ ក្នុងចំណោមព្រឹត្តិការណ៏មិនចុះសំរុងគ្នា $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ដែលបង្កើតជាសាកលកំណត់ដោយ :

$$P(A) = P(B_1)P(A \setminus B_1) + P(B_2)P(A \setminus B_2) + \ldots\ldots + P(B_n)P(A \setminus B_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \setminus B_i)$$

ឧទាហរណ៏ ១:

នៅក្នុងកេសទីមួយមានចង្កៀង 20 គ្រឿងដែលក្នុងនោះមាន 18 គ្រឿងអាចប្រើប្រាស់បាន ។ នៅក្នុងកេសទីពីរ មានចង្កៀង 10 គ្រឿងដែលក្នុងនោះមាន 9 គ្រឿងអាចប្រើប្រាស់បាន ។ គេយកចង្កៀងមួយពីកេសទីពីរ ដាក់ទៅក្នុងកេសទីមួយ ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយចង្កៀងមួយដែលយកចេញពីកេសទីមួយជាចង្កៀងអាចប្រើប្រាស់បាន ?

ចំលើយ :

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៏ " ចង្កៀងដែលយកចេញពីកេសទីមួយជាចង្កៀងដែលអាចប្រើប្រាស់បាន " ហើយ B_1 ជាព្រឹត្តិការណ៏ " ចង្កៀងដែលយកចេញពីកេសទីពីរដាក់ចូលកេសទីមួយអាចប្រើប្រាស់បាន" និង B_2 ជាព្រឹត្តិការណ៏ " ចង្កៀងដែលយកចេញពីកេសទីពីរដាក់ចូលកេសទីមួយមិនអាចប្រើប្រាស់បាន " ។

$$P(B_1) = \frac{9}{10}; P(B_2) = \frac{1}{10}$$

ដូច្នេះប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយចង្កៀងដែលយកចេញពីកេសទីមួយអាចប្រើប្រាស់បានជាប្រូបាប៊ីលីតេមានលក្ខខ័ណ្ឌដែលកំណត់ដោយ $P(A \setminus B_1) = \frac{19}{21}$ (ក្រោមលក្ខខ័ណ្ឌ B_1) ។ ដូចគ្នានេះដែរប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយចង្កៀងដែលយកចេញពីកេសទីមួយអាចប្រើប្រាស់បានក្រោមលក្ខខ័ណ្ឌ B_2 កំណត់ដោយ :

$$P(A \setminus B_2) = \frac{18}{21}$$

ដូច្នេះ $P(A) = P(B_1)P(A \setminus B_1) + P(B_2)P(A \setminus B_2)$

$$= \frac{9}{10} * \frac{19}{21} + \frac{1}{10} * \frac{18}{21} = 0.9$$

<u>ឧទាហរណ៍</u> :

មានមនុស្សចំនួន 6 នាក់បានចូលលេងល្បែងដ៏សាហាវមួយ ឈ្មោះថា "Roulette Russe" ។ អ្នកទាំង 6 នោះមានឈ្មោះ A,B,C,D,E,F ដែលត្រូវលេងតាមលំដាប់នេះ ។ នៅក្នុងល្បែងនេះគេយកកាំភ្លើង "revolver" ដែលអាចដាក់បាន 6 គ្រាប់ ។ អ្នកទីមួយត្រូវដាក់គ្រាប់កាំភ្លើងមួយគ្រាប់ហើយបង្វិលដុំកាំភ្លើងដោយចៃដន្យរួចបាញ់ខ្លួនឯង ។ បើអ្នកទីមួយមិនស្លាប់អ្នកទីពីរត្រូវដាក់បន្ថែមមួយគ្រាប់ទៀតរួចបាញ់ខ្លួនឯង ។ បើអ្នកទីពីរមិនស្លាប់ទៀតគេនឹងបន្ថែមមួយគ្រាប់ទៀតហើយបើគ្មានអ្នកស្លាប់ទេគេបន្តធ្វើរបៀបនេះរហូតដល់អ្នកទី 6 ។ តើអ្នកមានលេខរៀងទីប៉ុន្មានដែលមានសំណាងជាងគេនៅក្នុងទង្វើនេះ ?

<u>ចំលើយ</u> :

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ " បុគ្គល A ត្រូវស្លាប់ "

$\overline{A}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ " បុគ្គល A មិនស្លាប់ "

<u>ទីតាំងទី **1**</u> :

$$P(A)=\frac{1}{6}$$

<u>ទីតាំងទី **2**</u> :

$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})P(B\setminus\overline{A})=\frac{5}{6}*\frac{2}{6}=\frac{5}{18}$$

<u>ទីតាំងទី **3**</u> :

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)=P(\overline{A})P(\overline{B}\setminus\overline{A})P(C\setminus\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{5}{6}*\frac{4}{6}*\frac{3}{6}=\frac{5}{18}$$

<u>ទីតាំងទី**4**</u> :

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap D)=P(\overline{A})P(\overline{B}\setminus\overline{A})P(\overline{C}\setminus\overline{A}\cap\overline{B})P(D\setminus\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap D)=\frac{5}{6}*\frac{4}{6}*\frac{3}{6}*\frac{4}{6}=\frac{5}{27}$$

<u>ទីតាំងទី**5**</u> :

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}\cap E)=P(\overline{A})P(\overline{B}\setminus\overline{A})P(\overline{C}\setminus\overline{A}\cap\overline{B})P(\overline{D}\setminus\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})P(E\setminus\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D})$$

$$= \frac{5}{6}*\frac{4}{6}*\frac{3}{6}*\frac{2}{6}*\frac{5}{6} = \frac{5^2}{18^2}$$

ទីតាំងទី 6 :

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}F) = P(\bar{A})P(\bar{B} \setminus \bar{A})P(\bar{C} \setminus \bar{A}\bar{B})P(\bar{D} \setminus \bar{A}\bar{B}\bar{C})P(\bar{E} \setminus \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D})P(F \setminus \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E})$$

$$= \frac{5}{6}*\frac{2}{3}*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{6}*\frac{6}{6} = \frac{5}{18^2}$$

យើងសង្កេតឃើញថាទីតាំងដែលល្អបំផុតចំពោះអ្នកលេងទាំងនេះគឺជាទីតាំងចុងក្រោយបំផុត ។ យើងក៏ អាច ផ្ទៀងផ្ទាត់ផងដែរថាក្នុងចំណោមអ្នកលេងទាំង 6 នាក់នេះត្រូវមានម្នាក់ជាអ្នកស្លាប់ បានសេចក្តីថា :

$$P(A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E) + P(F) = 1$$

S-plus:

```
function()
{ b<-1
  z<-1/6
  VeryLuck<-z
   for(i in 2:6)
        {  a<-i/6
            b<-b*((6-i+1)/6)
             z[i]<-a*b
             if( VeryLuck>z[i])
            {
                      VeryLuck <-z[i]
                       Num<-i
              }
          }
      Person<-c(1,2,3,4,5,6)
      z<-cbind(Person,z)
      VeryLuck<-cbind(Num,VeryLuck)
       return(z,VeryLuck)
    }
```

Result:

```
      Person           z
[1,]     1         0.16666667
[2,]     2         0.27777778
[3,]     3         0.27777778
[4,]     4         0.18518519
[5,]     5         0.07716049
[6,]     6         0.01543210

$VeryLuck:
    Num  VeryLuck
[1,]   6 0.0154321
```

រូបមន្ត Bayes

ឧទាហរណ៏

នៅក្នុងក្រុមហ៊ុន SIMCO មានបុគ្គលិក 20% មានសញ្ញាប័ត្រ Management ។ ក្នុងចំណោមបុគ្គលិកទាំង 20% នេះ មាន 70% មានប៉ុស្ដ៍អចិន្ត្រៃយ៏ ។ យើងដឹងទៀតថាក្នុងចំណោមបុគ្គលិកដែលគ្មានសញ្ញាប័ត្រ Management 15% មានប៉ុស្ដ៍អចិន្ត្រៃយ ។ បើសិនណាបុគ្គលិកម្នាក់ដែលមាន មានប៉ុស្ដ៍អចិន្ត្រៃយត្រូវបានជ្រើសរើសដោយចៃដន្យពីក្រុមហ៊ុននេះ តើប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយគាត់មានសញ្ញាប័ត្រខាង Management ស្មើប៉ុន្មាន ?

ចំលើយ :

បុគ្គលិកទាំងអស់ត្រូវចែកជាពីរផ្នែកមិនចុះសំរុងគ្នា (disjoints) គឺ :

E_1 : បុគ្គលិកដែលមានសញ្ញាប័ត្រ Management

E_2 : បុគ្គលិកដែលគ្មានសញ្ញាប័ត្រ Management

$$P(E_1)=0.20, P(E_2)=0.80$$

A : បុគ្គលិកម្នាក់ដែលបានជ្រើសរើសដោយចៃដន្យ មានប៉ុស្ដ៍អចិន្ត្រៃយ

$$P(A\setminus E_1)=0.70, P(A\setminus E_2)=0.15$$

អ្វីដែលយើងចង់រកនៅពេលនេះគឺ $P(E_1\setminus A)$:

$$P(E_1\setminus A)=\frac{P(E_1\cap A)}{P(A)}\Rightarrow P(E_1\cap A)=P(A)P(E_1\setminus A)$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត A បង្កឡើងពីព្រឹត្តិការណ៏ពីរដែលមិនចុះសំរុងគ្នា :

$$A=(E_1\cap A)\cup(E_2\cap A)$$

ដូច្នេះ :

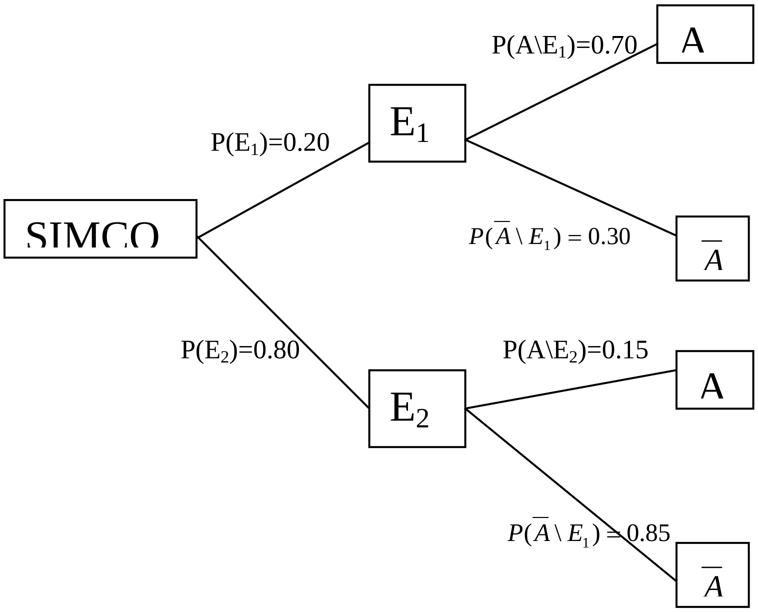
$$P(A)=P(E_1\cap A)+P(E_2\cap A)$$

ដោយ $P(E_1\cap A)=P(E_1)P(A\setminus E_1)$ និង $P(E_2\cap A)=P(E_2)P(A\setminus E_2)$

$$\Rightarrow P(E_1\setminus A)=\frac{P(E_1)P(A\setminus E_1)}{P(E_1)P(A\setminus E_1)+P(E_2)P(A\setminus E_2)}$$

រូបមន្តនេះហៅថា រូបមន្ត Bayes ។

ដូច្នេះ : $$P(E_1 \backslash A) = \frac{0.20 * 0.70}{0.20 * 0.70 + 0.80 * 0.15} = 0.5384$$



ជាទូទៅ :

$$P(E_i \backslash A) = \frac{P(E_i)P(A \backslash E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A \backslash E_i)}$$

រូបមន្តនេះអោយឈ្មោះថា រូបមន្ត Bayes ។

<u>លំហាត់</u> :

១- ប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយយន្តហោះចេញតាមពេលកំណត់ដែលបានព្រៀងនៅលើតារាងពេលវេលា (scheduled flight departs) P(D)=0.83 ។ ដូចគ្នានេះដែរប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយយន្តហោះនេះមកដល់តាមពេលកំណត់ P(A)=0.82 ហើយប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយយន្តហោះនេះចេញតាមពេលកំណត់និងមកដល់តាមពេលកំណត់ P(DA)=0.78 ។ កំណត់ប្រូបាប៊ីលីតេ :
a) P(A\D) ; b) P(D\A)

២- នៅក្នុងភូមិដ៏តូចមួយមាននិស្សិតមួយចំនួនដែលបានបញ្ចប់ការសិក្សាថ្នាក់មធ្យមផ្នែកបច្ចេកទេសកសិកម្ម ហើយដែលយើងបានធ្វើសំរង់ស្ថិតិដូចតទៅ :

	មានការងារធ្វើ	គ្មានការងារធ្វើ	សរុប
បុរស	460	40	500
ស្ត្រី	140	260	400
សរុប	600	300	900

មនុស្សម្នាក់ត្រូវបានជ្រើសរើសពីក្នុងភូមិនេះដោយចៃដន្យដើម្បីទៅសិក្សាបន្តនៅបរទេសសិក្សាស្វែងយល់ ពីបច្ចេកវិជ្ជាមួយចំនួនក្នុងការបង្កើតរោងចក្រមួយក្នុងភូមិនេះ ។ កំណត់ប្រូបាប៊ីលីតេ :

ក- មនុស្សម្នាក់នេះជាបុរសក្រោមលក្ខខ័ណ្ឌដែលគាត់មានការងារធ្វើ

ខ- មនុស្សម្នាក់នេះជស្ត្រីក្រោមលក្ខខ័ណ្ឌដែលគាត់មានការងារធ្វើ

ចំលើយ :

តាង M ជាបុរសដែលបានជ្រើសរើស

F ជាស្ត្រីដែលបានជ្រើសរើស

E មនុស្សម្នាក់នេះមានការងារធ្វើ

$$P(M \setminus E)=\frac{P(E\cap M)}{P(E)}=\frac{\frac{460}{900}}{\frac{600}{900}}=\frac{23}{30};P(F \setminus E)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}$$

៣- អ្នកទទួលខុសត្រូវនៃការិយាល័យធុនធានមនុស្សមួយកន្លែងបានតំកល់ទុកប្រវត្តិរូបសង្ខេបរបស់បញ្ញវ័ន្ត ចំនួន 16,000 នាក់ ។ គេបានធ្វើការសិក្សាទៅលើអាយុ និងភេទរបស់បញ្ញវ័ន្តទាំងនេះដូចខាងក្រោម :

អាយុ \ ភេទ	ប្រុស(M)	ស្រី(F)	សរុប
ក្រោម 30 ឆ្នាំ (A)	1200	1700	2900
ចន្លោះ 30 ទៅ 40 ឆ្នាំ (B)	2600	4200	6800
ច្រើនជាង 40 ឆ្នាំ (C)	4000	2300	6300
សរុប	7800	8200	16000

ក-បើប្រវត្តិរូបសង្ខេបរបស់បញ្ញវ័ន្ត ម្នាក់ត្រូវបានជ្រើសរើសដោយចៃដន្យ តើប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយមនុស្សម្នាក់នេះមានអាយុតិចជាង 30 ឆ្នាំស្មើប៉ុន្មាន ?

ខ- ប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយមនុស្សស្រីម្នាក់ដែលត្រូវបានជ្រើសរើសដោយចៃដន្យមានអាយុតិចជាង 30 ឆ្នាំ ។

គ- ប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយមនុស្សម្នាក់ដែលត្រូវបានជ្រើសរើសដោយចៃដន្យជាមនុស្សប្រុសនិងមានអាយុច្រើនជាង 40 ឆ្នាំ ?

ឃ- ប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយមនុស្សម្នាក់ដែលត្រូវបានជ្រើសរើសដោយចៃដន្យជាមនុស្សស្រីនិងមានអាយុតិចជាង 40 ឆ្នាំ ?

<u>**ចំលើយ**</u> **:**

ក- $P(A)=\frac{2900}{16000}=0.1813$

ខ- $PA\setminus F)=\frac{P(A\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{1700}{16000}}{\frac{8200}{16000}}=0.2073$

គ- $P(M\cap C)=\frac{4000}{16000}=0.25$ ឬ $P(M\cap C)=P(M)P(C\setminus M)=\frac{7800}{16000}*\frac{4000}{7800}=0.25$

ឃ- $P(F\cap(A\cup B))=P(F\cap A)+P(F\cap B)=0.36875$