សញ្ញាណគ្រឹះនៃប្រូបាប៊ីលីតេ

១- សេក្តីផ្តើម

ប្រូបាប៊ីលីតេគឺជាផ្នែកមួយយ៉ាងសំខាន់ដែលផ្សារភ្ជាប់ស្ថិតិអធិប្បាយ (descriptive statistics) ទៅ នឹងស្ថិតិវិភាគ (statistical analysis) ។

ការសិក្សាទៅលើ descriptive statistics ផ្តល់នូវការ រួមចំនែកយ៉ាងធំធេងក្នុងការបង្កើត mathematics models ដើម្បីសិក្សាទៅលើបាតុភូតចៃដន្យ ដែលតែងតែកើតឡើងនៅក្នុង ជីវភាពរស់នៅរបស់យើង ។ លក្ខណ:ចំបងនៃបាតុភូតចៃដន្យទាំងនេះត្រូវបានឆ្លើយតបទៅនឹងការគណនានៃប្រូបាប៊ីលីតេដែលបានរីកចំរើនយ៉ាងលឿននៅក្នុងគណិតវិទ្យា ។

គារសិក្សាទៅលើមូលដ្ឋានចំបងនៃទ្រឹះស្តី ប្រូបាប៊ីលីតេបានកើតឡើងនៅក្នុងសតវត្សទី XVI-XVII ដោយលោក Kardana, Ferma, Pascal នឹងអ្នកប្រាជ្ញមួយចំនួនទៀត ។

២- តើប្រូបាប៊ីលីតេសិក្សាអំពីអ្វី ? :

ប្រូបាប៊ីលីតេមានតួនាទីយ៉ាងសំខាន់ក្នុងការសិក្សាទៅលើបាតុភូតចៃដន្យក៏ដូចជាការសិក្សាតាមដានទៅលើព្រឹត្តិការណ៍ ។

យើងចែកព្រឹត្តិការណ៍ ជា 3 ផ្នែកធំ ៗ :

- ព្រឹត្តិការពិតប្រាកដ

  ជាព្រឹត្តិការណ៍មួយដែលចាំបាច់ត្រូវតែកើតឡើងក្រោមលក្ខខ័ណ្ឌមួយច្បាស់លាស់ ។

ឧទាហរណ៏ :

ទឹកនៅក្នុងសម្ពាធបរិយាកាសធម្មតា កកនៅ 0^oC ។ *សម្ពាធបរិយាកាសធម្មតា* ជាលក្ខខ័ណ្ឌច្បាស់លាស់ចំណែកឯ *កកនៅ*0^oC ជាព្រឹត្តិការណ៏ពិតប្រាកដ ។

- **ព្រឹត្តការណ៍មិនអាចមានឬមិនពិត :**

ក្រោមលក្ខខ័ណ្ឌមួយច្បាស់លាស់ព្រឹត្តិការណ៍នេះមិនអាចកើតមានឡើងទេ ។

ឧទាហរណ៍ :

នៅក្នុងសម្ពាធបរិយាកាសធម្មតា ទឹក កក នៅ 20^oC ។ លក្ខខ័ណ្ឌរបស់យើងនៅពេលនេះគឺ *សម្ពាតបរិយាកាសធម្មតា* ចំនែកឯ *ទឹក កកនៅ* 20^oC ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនពិត ។

- **ព្រឹត្តិការណ៍ចៃដន្យ :**

ជាព្រឹត្តិការណ៍មួយដែលកើតឡើងហើយដែលយើងពុំអាចកំណត់ទុកនូវលទ្ធផលរបស់វាជាមុនបាន ។

ឧទាហរណ៍ :

នៅក្នុងការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ យើងពុំអាចកំណត់ជាមុនបាននូវលទ្ធផលរបស់វា ។ ព្រឹត្តិការណ៍ដែលនឹងកើតឡើងជាព្រឹត្តិការណ៍ចៃដន្យ ។

ដូច្នេះយើងអាចនិយាយថា ប្រូបាប៊ីលីតេសិក្សាទៅលើច្បាប់បំរែបំរួលនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលនឹងកើតមានឡើងនៅក្នុងការពិសោធន៍ ។

៣-<u>វិញ្ញាសា (ការពិសោធន៍) និងព្រឹត្តិការណ៍ចៃដន្យ</u> :

និយមន័យ:

វិញ្ញាសាជាទង្វើមួយដែលគេ ពុំអាចកំនត់ច្បាស់លាស់ជាមុននូវលទ្ធផលរបស់វា ។

ឧទាហរណ៍ :

នៅក្នុងថង់មួយមានកូនឃ្លីពណ៌ជាច្រើន ។ គេដកកូនឃ្លីមួយពីក្នុងថង់នោះ ។ ការដកកូនឃ្លីចេញពីក្នុងថង់ ជា *វិញ្ញាសា* ចំនែកឯការកំណត់ពណ៌សំបុររបស់កូនឃ្លីដែលដកចេញមកនេះជា *ព្រឹត្តិការណ៍ចៃដន្យ* ។

ព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុងគ្នា:

គេនិយាយថាព្រឹត្តិការណ៍ពីរជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុងគ្នាកាលណាព្រឹត្តិការណ៍ទាំងពីរនេះពុះអាចកើតឡើងព្រមពេលជាមួយគ្នាឬរួមគ្នា ។

ឧទាហរណ៍:

នៅក្នុងការបោះកាក់មួយដងយើងអាចទទួលបានឬមួយផ្នែក រូបឬមួយផ្នែកខាងលេខ ។ បានសេចក្តីថា រូប និងហា លេខ ពុំអាចកើតឡើងព្រមពេលជាមួយគ្នាទេ ។ ព្រឹត្តិការទាំងពីរនេះជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុងគ្នា ។

ចំណាំ:

គេតែងតាងព្រឹត្តិការណ៍ដោយអក្សរ A,B,C,D,……… ។

តាមន័យរបស់គណិតវិទ្យា បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរមិនចុះសំរុងគ្នានោះ :

$$\boxed{A \cap B = \phi}$$

សាកល:

សាកល Ω គឺជាសំនុំលទ្ធផលដែលអាចកើតមានឡើងនៅក្នុងការពិសោធន៍ (នៃវិញ្ញាសា) ។

លទ្ធផលនិមួយៗដែលអាចកើតមានឡើងនៃវិញ្ញាសាអោយឈ្មោះថា *ព្រឹត្តិកាណ៍ឯកធាតុ* (elementary events) ។ ព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុច្រើនតាងដោយ $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ldots,\omega_n$ ។ គ្រប់ព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុដែលយើងចង់អោយកើតមានឡើងនៃវិញ្ញាសាអោយឈ្មោះថា *ព្រឹត្តិការណ៍នៃករណីស្រប* ចំណែកឯព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុដែលអាចកើតមានឡើងនៃវិញ្ញាសាអោយឈ្មោះថា *ព្រឹត្តិការណ៍នៃករណីអាច* ។

និយមន័យ:

ប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺជាផលធៀបរវាងចំនួនព្រឹត្តិការណ៍នៃករណីស្របនឹងចំនួនព្រឹត្តិការណ៍នៃករណីអាច ។

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

ឬ

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

m-ចំនួនព្រឹត្តិការណ៍នៃករណីស្រប ; n-ចំនួនព្រឹត្តិការណ៍នៃករណីអាច ។

ក្នុងលក្ខខ័ណ្ឌនេះយើងសន្មតិថាព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុទាំងអស់មិនចុះសំរុងគ្នា មានសមភាពនឹងគ្នាហើយបង្កើតបានជាសាកល Ω ។

ចំណាំ:

តាមការបង្ហាញខាងលើយើងអាចនិយាយបានថា ប្រូបាប៊ីលីតេគឺជាតំលៃលេខដែលកំណត់នូវកំរិតលទ្ធភាពនៃការកើតឡើងនៃព្រឹត្តិការណ៍ ។

<u>លក្ខណៈសំគាល់នៃប្រូបាប៊ីលីតេៈ</u>

- ប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៏ពិតប្រាកដស្មើ មួយ
- ប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៏នៃព្រឹត្តិការណ៏មិនអាចមានស្មើសូន្យ
- ប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៏ចៃដន្យជាចំនួនវិជ្ជមានដែលកំណត់នៅក្នុងចន្លោះ សូន្យ និង មួយ ។

$$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$$

4- <u>តំរៀប(arrangement) , ចំលាស់(Permutation), និងបន្សំ(Combination):</u>

- តំរៀប(មិនសារឡើងវិញ)

គេអោយសំនុំរាប់អស់ E ដែលមាន n ធាតុ ។ ដែលហៅថាតំរៀបនៃ m ធាតុនៃសំនុំ E គឺជាអនុវត្តន៏ប្រកាន់និមួយៗពី សំនុំ [1,m] ទៅសំនុំ E ។

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)......(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

<u>Splus :</u> choose(n,m,order.matters=T)

ឧទាហណ៏ៈ

តើគេអាចសរសេរលេខ 2 ខ្ទង់ដែលបង្កើតឡើងដោយលេខ 1,2,3 បានប៉ុន្មានរបៀប ?

$$A_3^2 = 3*2 = 6$$

$$\{12,13,21,23,31,32\}$$

<u>ចំណាំ</u>ៈ ក្នុងករណីនៃតំរៀសារឡើងវិញ $A_n^m = n^m$

- ចំលាស់ៈ

បើ n=m តំរៀប A_n^m ហៅថាចំលាស់នៃ n ធាតុដែលតាងដោយ P_n ដែលកំណត់ :

$$P_n = A_n^n = n! = 1.2.3....n$$

ឧទាហរណ៏ៈ

តេីគេអាចសរសេរលេខ 3 ខ្ទង់ដែលបង្កឡើងដោយលេខ 1,2,3 បានប៉ុន្មានរបៀប ?

$$A_3^3 = P_3 = 1*2*3 = 6$$

- បន្សំ:

គេអោយសំនុំរាប់អស់ E ដែលមាន n ធាតុ ។ ដែលហៅថាបន្សំនៃ m ធាតុយកក្នុងសំនុំ E គឺជាផ្នែកមួយនៃសំនុំ E ដែលមាន m ធាតុ ហើយ តាងដោយ $C_n^m \, or \binom{n}{m}$ ។

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}}$$

S-plus: choose(n,m,order.matters=F)

ឧទាហរណ៍:

តើគេអាចទាញប៉ៀរ 2 សន្លឹកពីក្នុងប៉ៀរដែលមាន 32 សន្លឹកបានប៉ុន្មានរបៀប ?

$$C_{32}^2 = \frac{32!}{2!30!}$$

<u>ចំណាំ</u> :

ក្នុងការដោះស្រាយបញ្ហាដែលទាក់ទងទៅនឹងបន្សំ គេច្រើនអនុវត្តក្បួនដូចខាងក្រោម :

- បើសិនណាវត្ថុ A ត្រូវបានជ្រើសរើសដោយ n របៀបហើយវត្ថុ B ត្រូវបានជ្រើសរើសដោយ m របៀប ក្នុងចំណោមវត្ថុមួយចំនួននោះការជ្រើសរើសវត្ថុ A ឬ B អាចមាន n+m របៀប ។
- បើសិនណាវត្ថុ A ត្រូវបានជ្រើសរើសដោយ n របៀបហើយបន្ទាប់ពីការជ្រើសរើសវត្ថុ A វត្ថុ B ត្រូវបានជ្រើសដោយ m របៀប នោះគូ (A,B) ត្រូវបានជ្រើសរើសដោយ n+m របៀប ។

5- <u>ឧទាហរណ៍មួយចំនួនក្នុងការគណនាប្រូបាប៊ីលីតេ</u> :

<u>ឧទាហរណ៍១</u>:

បុរសម្នាក់មានបំណងទូរស័ព្ទ ទៅមិត្តរបស់គាត់ ប៉ុន្តែគាត់ភ្លេចលេខដំបូងមួយខ្ទង់ ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយបុរសរូបនេះចុចចំលេខដែលគាត់ត្រូវការ ?

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលបុរសរូបនេះចុចចំលេខដែលគាត់ត្រូវការ ។ ចំនួនព្រឹត្តិការណ៍នៃករណីអាច ស្មើ 10 ដោយទូរសព្ទ័មាន 10 លេខ ដូច្នេះ :

$$P(A) = \frac{1}{10}$$

<u>ឧទាហរណ៍ ២</u> : បុរសម្នាក់បានភ្លេចលេខទូរស័ព្ទ 2 ខ្ទង់ចុងក្រោយនៃលេខទូរស័ព្ទរបស់មិតតគាត់

ហើយគាត់ដឹង ទៀតថា លេខទាំងពីរខ្ទង់ចុងក្រោយនេះខុសគ្នា ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយបុរសនេះចុចចំលេខដែល គាត់ត្រូវការនៅលើកទីមួយ ?

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៏ដែលបុរសម្នាក់នេះចុចចំលេខដែលគាត់ត្រូវការ ។

$$P(A)=\frac{1}{A_{10}^{2}}$$

ឧទាហរណ៏ 3 :

គេបោះគ្រាប់ឡុក 2 គ្រាប់ ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរនេះស្មើ 4 ?

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៏ដើម្បីអោយគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរមានផលបូកស្មើ 4 ។ យើងឃើញថាគ្រាប់ឡុកឡាក់និមួយៗអាចចេញបាន 6 របៀប ។ ដូច្នេះគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរនេះអាចចេញបាន 6*6 របៀប ។ ចំនួនព្រឹត្តិការណ៏នៃករណីអាចស្មើ 36 របៀប ឯចំនួនព្រឹត្តិការណ៏នៃករណីស្រួបស្មើ 3 គឺ :

$$\{(1,3),(3,1),(2,2)\}$$

$$P(A)=\frac{3}{36}$$

ឧទាហរណ៏អនុវត្ត :

១-នៅក្នុងសហគ្រាសមួយមានលោហធាតុ 10 ប្រភេទហើយដែលមាន 7 ប្រភេទជាប្រភេទ លេខមួយ ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយក្នុងចំណោមលោហធាតុ 6 ប្រភេទដែលគេយកចេញពីសហគ្រាស នោះមានលោហធាតុ 4 ប្រភេទជាប្រភេទលេខមួយ ។

២-គេទាញបៀរ 5 សន្លឹកពីក្នុងបៀរ 52 សន្លឹក ។ តើលទ្ធផលនៃការទាញបៀរនេះអាចមានប៉ុន្មានរបៀបខុសៗគ្នា ?

៣-សំនុំមួយមាន 5 ធាតុ តើគេអាចបង្កើតសំនុំរងដែលមាន 3 ធាតុបានប៉ុន្មានរបៀប ?

S-plus: Factorial, Combinations, Permutation

DESCRIPTION

Compute n!, binomial coefficients, number of combinations and permutations, multinomial coefficients.

USAGE

```
factorial(n)
choose(n, k, order.matters=F)
choose.multinomial(n, m)
```

REQUIRED ARGUMENTS

- n integer vector. Must be length 1 for choose.multinomial. Need not be integer for factorial.
- k integer vector.
- m integer vector, which sums to n.

VALUE

a numeric vector:

factorial(n) is n!

choose(n, k) is n! / (k! (n-k)!), i.e. the binomial coefficients.

choose(n, k, order.matters=T) is n! / (n-k)!, i.e. the number of ordered subsets of length k from a set with n distinct elements.

choose.multinomial(n, m) is n!/ prod(m!), the multinomial coefficients.

DETAILS

These functions use gamma and lgamma for computations.

EXAMPLES

```
factorial(5)

choose(5, 2)

choose(5, -1:6)

choose.multinomial(6, c(3,1,2))

choose(5, 2, order=T)
```

ប្រមាណវិធីមួយចំនួននៃប្រូបាប៊ីលីតេ

1-ប្រមាណវិធីបូក :

- បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរមិនចុះសំរុងគ្នា (disjoint) នោះ :

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

ជាទូទៅបើ $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុងគ្នានោះ :

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

- បើ $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុដែលបង្កើតបានជាសាកល Ω នោះ :
- ព្រឹត្តិការណ៍ពីរជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយគ្នាកាលណា ព្រឹត្តិការណ៍ទាំងពីរនេះបង្កើតបានជាសាកល Ω ។ គេតែងតាងព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយគ្នាដោយ $\overline{A}$ ។ ដូច្នេះបើ $\overline{A}$ និង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរផ្ទុយគ្នានោះ :

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

2- ស្វ័យសត្យនៃប្រូបាប៊ីលីតេ :

ក-$\forall A \subset \Omega \Rightarrow 0 \le P(A) \le 1$

ខ-$P(\Omega)=1$

គ-$\forall A, B \subset \Omega, A \cap B=\phi \Rightarrow P(A \cup B)=P(A)+p(B)$ ។

3- ប្រមាណវិធីគុណនៃព្រឹត្តិការណ៍ :

ផលគុណព្រឹត្តិការណ៍ពីរ A និង B គឺជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលកើតឡើងរួមគ្នារវាងព្រឹត្តិការណ៍ទាំងពីរ ។

ឧទាហរណ៏:

បើ A ជាលោហៈធាតុប្រភេទលេខមួយ ហើយ B ជាលោហៈធាតុដែលលាបពណ៌ នោះលោហៈធាត AB ជាលោហៈធាតុប្រភេទលេខមួយហើយលាបពណ៌ ។

4-ប្រូបាប៊ីលីតេមានលក្ខខ័ណ្ឌ (conditional probability) :

ប្រូបាប៊ីលីតេមានលក្ខខ័ណ្ឌ P(A\B) គឺជាប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍ A ដែលបានកើតឡើងក្នុងស្ថានភាពមួយនៅពេលដែលព្រឹត្តិការណ៍ B បានកើតរួចមកហើយ ។

ឧទាហរណ៍ :

នៅក្នុងថង់មួយមានប៊ូលពណ៌ស 3 និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅ 3 ។ គេយកប៊ូលចេញពីក្នុងថងម្តងមួយៗចំនួនពីរលើកដោយមិនដាក់ចូលទៅវិញ ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយការដកចេញប៊ូលពីក្នុងថង់លើកទីពីរជាប៊ូលពណ៌ សបើសិនណាការដកចេញលើកទីមួយជាប៊ូលពណ៌ខ្មៅ ?

បើ A ជាព្រឹត្តិការណ៍នៃប៊ូលពណ៌ខ្មៅ

B ជាព្រឹត្តិការណ៍នៃប៊ូលពណ៌ ស

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2};P(A*B)=P(A\cap B)=\frac{3*3}{A_6^2}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$$

P(B ដោយស្គាល់ A)$=\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{5}$

ប្រូបាប៊ីលីតេនេះហៅថាប្រូបាប៊ីលីតេ B មានលក្ខខ័ណ្ឌ A ហើយគេច្រើនតែតាងដោយ P(B\A) ឬ $P_A(B)$ ។

<u>និយមន័យ :</u>

ប្រូបាប៊ីលីតេមានលក្ខខ័ណ្ឌនៃព្រឹត្តិការណ៍ B ក្រោមលក្ខខ័ណ្ឌដែលព្រឹត្តិការណ៍ A បានកើតឡើងរួចមកហើយកំណត់ដោយ :

$$P(B\setminus A)=\frac{P(AB)}{P(A)},0<P(A)\leq 1$$

$$P(AB)=P(B\setminus A)*P(A)$$

<u>ចំណាំ :</u>

$$P(AB)=P(BA)\Leftrightarrow P(A)*P(B\setminus A)=P(B)P(A\setminus B)$$

<u>វិបាក :</u>

$$P(A_1\cdot A_2\cdots\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\setminus A_1)P(A_3\setminus A_1A_2)\ldots\ldots.P(A_n\setminus A_1A_2\cdots\cdot A_{n-1})$$

ឧទាហរណ៍ :

១-អ្នកលេងកូនឃ្លីម្នាក់មានឃ្លីស 3 គ្រាប់ និងឃ្លីក្រហម 7 គ្រាប់ ។ គាត់បានដកឃ្លីចេញពីហោប៉ៅ 1 គ្រាប់ (ដោយមិនដាក់ទៅវិញ) បន្ទាប់មកដកមួយគ្រាប់ទៀត ។

រកប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយកូនឃ្លីដែលគាត់ដក ចេញលើកទីមួយជាឃ្លីពណ៌សនិងលើកទីពីរជាឃ្លីពណ៌ក្រហម ។

ចំលើយ : 7/30

២- គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ពីរគ្រាប់ គ្រាប់ឡុកឡាក់ទីមួយធ្វើអំពីភ្លុកនិងគ្រាប់ឡុកឡាក់ទីពីរធ្វើអំពីស្នែង ។

ក- កំណត់ប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយផលបូកគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរស្មើ 8 ?

ខ- កំណត់ប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយផលបូកគ្រាប់ឡុកឡាក់ តូចជាង 10 ។